fiber of it is the linear group acting in the tangent space to the centered Grassman manifold. Neifeld connection is given in this fibering. It is shown, that the curvature and torsion objects of Neifeld connection are tensors. It is proved, that the Bortolotti's clothing of Grassman manifold induces this connection.

УДК 514.76

М. А. Белозерова, Ю. И. Попов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Соответствия Бомпьяни — Пантази, порождаемые $\mathcal{H}$-распределением аффинного пространства

Рассматривается гиперполосное $\mathcal{H}$-распределение аффинного пространства, состоящее из базисного распределения (n–2)-мерных линейных элементов Λ_{n-2} и оснащающего распределения гиперплоскостных элементов H_{n-1}, с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре A следующего вида:

$$A \in \Lambda_m \subset H_{n-1}.$$

Дано задание $\mathcal{H}$-распределения в репере 1-го порядка и доказана теорема существования. Установлены соответствия Бомпьяни — Пантази между нормалями 1, 2-го рода основных структурных Λ-, L-, H-подрасслоений $\mathcal{H}$-распределения.

Ключевые слова: аффинное пространство, гиперполосное распределение, оснащение, соответствия Бомпьяни — Пантази, нормаль Алшибая.

Во всей работе придерживаемся следующих обозначений:

1. Индексы принимают значения

$$I, J, K, ... = \overline{1, n}\,; i, j, k, ... = \overline{1, n-2}\,; \alpha, \beta, \gamma, ... = \{n-1, n\}\,; a, b, c, ... = \{i, n-1\}.$$

2. Оператор ∇ действует по следующему закону:

$$\nabla T^{j\beta n}_{i\alpha,n-1} = dT^{j\beta n}_{i\alpha,n-1} - T^{j\beta n}_{k\alpha,n-1}\omega^k_i - T^{j\beta n}_{i\gamma,n-1}\omega^\gamma_\alpha -$$
$$- T^{j\beta n}_{i\alpha,n-1}\omega^{n-1}_{n-1} + T^{k\beta n}_{i\alpha,n-1}\omega^j_k + T^{j\gamma n}_{i\alpha,n-1}\omega^\beta_\gamma + T^{j\beta n}_{i\alpha,n-1}\omega^n_n.$$

3. $[\Lambda, L]$ — плоскость, натянутая на плоскости Λ и L.

4. $A^n_{[jk]} = A_{jk} - A_{kj}$ — альтернация по индексам j и k

1. Задание гиперполосного распределения

Рассмотрим аффинное пространство A_n, структурные уравнения которого имеют вид

$$\begin{cases} D\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I_K, \\ D\omega^K_I = \omega^L_I \wedge \omega^K_L. \end{cases} \tag{1.1}$$

Потребуем, чтобы в каждом центре A области Ω пространства A_n имело место соотношение

$$A \in \Lambda(A) \subset H(A), \tag{1.2}$$

где $\Lambda(A) \overset{def}{=} \Lambda_{n-2}(A)$ — линейный элемент распределения (n–2)-плоскостей (Λ-подрасслоение), $H(A) \overset{def}{=} H_{n-1}(A)$ — линейный элемент распределения гиперплоскостей (Н-подрасслоение).

Пару распределений (n-2)-плоскостей (Λ-подрасслоения) и гиперплоскостей (Н-подрасслоения) с отношением их соответствующих элементов (1.2) назовем гиперполосным распределением $H(\Lambda, L)$ [1; 2] или кратко $\mathcal{H}$-распределение.

Адаптируем подвижной репер $R^0 = \{A, \overline{e}_K\}$ аффинного пространства A_n с $\mathcal{H}$-распределением следующим образом: $\overline{e}_{n-1} \in H(A)$, $\{\overline{e}_{n-1}\} \subset \Lambda(A)$, $\overline{e}_n$ выбираем произвольно так, чтобы $\overline{e}_n \notin H(A)$. В выбранном репере R^0 распределение $H(\Lambda, L) \subset A_n$ задается уравнениями

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K,\ \omega_i^{n-1} = \Lambda_{iK}^{n-1} \omega^K,\ \omega_{n-1}^n = \Lambda_{n-1K}^n \omega^K,$$
$$\nabla \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKI}^n \omega^I,\ \nabla \Lambda_{iK}^{n-1} + \Lambda_{iK}^n \omega_n^{n-1} = \Lambda_{iKI}^{n-1} \omega^I, \qquad (1.3)$$
$$\nabla \Lambda_{n-1,K}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_{n-1}^i = \Lambda_{n-1,KI}^n \omega^I.$$

Имеет место

Теорема 1. *В n-мерном аффинном пространстве гиперполосное $\mathcal{H}$-распределение существует с произволом (2n – 3) функций n аргументов.*

Доказательство. Представим чистое замыкание системы уравнений (1.13)

$$\nabla \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKI}^n \omega^I,\ \nabla \Lambda_{iK}^{n-1} + \Lambda_{iK}^n \omega_n^{n-1} = \Lambda_{iKI}^{n-1} \omega^I,\ \nabla \Lambda_{n-1K}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_{n-1}^i = \Lambda_{n-1KI}^n \omega^I$$

в виде

$$\Delta \Lambda_{iK}^n \wedge \omega^K = 0,\ \Delta \Lambda_{iK}^{n-1} \wedge \omega^K = 0,\ \Delta \Lambda_{n-1,K}^n \wedge \omega^K = 0. \qquad (1.4)$$

Количество форм, входящих в систему (1.4), будет равно $q = 2n - 3$.

С системой (1.4) ассоциируется последовательность матриц $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$. [3].

Определим характеры системы (1.4) следующим образом [3]:

$$\begin{cases} S_1 = rangM_1 = 2n - 3, \\ S_2 = rangM_2 - rangM_1 = 2(2n-3) - 2n - 3 = 2n - 3, \\ S_n = q - rangM_{n-1} = 2n - 3. \end{cases}$$

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \ldots + nS_n,\ Q = \frac{(2n-3)n(n+1)}{2}.$$

Посчитаем число Картана для этой системы

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \ldots + nS_n,\ Q = \frac{(2n-3)n(n+1)}{2}.$$

Разрешим систему (1.4) по лемме Картана:

$$\Delta \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKI}^n \omega^I,\ \Delta \Lambda_{iK}^{n-1} = \Lambda_{iKI}^{n-1} \omega^I,\ \Delta \Lambda_{n-1K}^n = \Lambda_{n-1KI}^n \omega^I. \quad (1.5)$$

Найдем число линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (1.5):

$$N = \left(\frac{n^2 - n}{2} + n \right)(2n-3) = \frac{(2n-3)n(n+1)}{2} .$$

Итак, $Q = N$, то есть данная система находится в инволюции. Решение этой системы существует, и произвол ее определяется характером S_n. Что и требовалось доказать.

Будем рассматривать регулярные гиперполосные $\mathscr{H}$-распределения, для которых главный фундаментальный тензор $\{\Lambda^n_{ij}\}$ 1-го порядка невырожденный.

$$\Lambda_0 = \det \left\| \Lambda^n_{ij} \right\| \neq 0 . \qquad (1.6)$$

Условия (1.6) позволяет ввести в рассмотрение обращенный фундаментальный тензор $\{\Lambda^{ij}_n\}$ 1-го порядка, компоненты которого удовлетворяют следующим соотношениям и дифференциальным уравнениям:

$$\Lambda^{ik}_n \Lambda^n_{kj} = \Lambda^{ki}_n \Lambda^n_{jk} = \delta^k_i , \; \nabla \Lambda^{is}_n = -\Lambda^i_n \Lambda^{js}_n \Lambda^n_{kjK} \omega^K . \qquad (1.7)$$

В силу выражений (1.3) и (1.7) получим

$$d \ln \Lambda_0 = 2\omega^i_i - (n-2)\omega^n_n + \Lambda_K \omega^K , \qquad (1.8)$$

где

$$\Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{ijK} = \Lambda_K . \qquad (1.9)$$

Согласно лемме Остиану Н. М. [4] возможна частичная канонизация репера

$$\Lambda^n_{n-1,j} \equiv 0 , \qquad (1.10)$$

геометрический смысл которой заключается в том, что вектор $\bar{e}_{n-1}$ помещается в характеристику $L_1 \overset{def}{=} L(A)$ гиперплоскости H(A). В этом случае формы ω^i_{n-1} становятся главными:

$$\omega^i_{n-1} = \Lambda^i_{n-1,K} \omega^K . \qquad (1.11)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка $\mathcal{H}$-распределение аффинного пространства задается относительно репера 1-го порядка уравнениями (1.12) и соотношением (1.13):*

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K,\ \omega_i^{n-1} = \Lambda_{iK}^{n-1}\omega^K,\ \omega_{n-1}^n = \Lambda_{n-1,\alpha}^n \omega^\alpha,$$
$$\omega_{n-1}^i = \Lambda_{n-1,K}^i \omega^K, \qquad (1.12)$$
$$\Delta\Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKI}^n \omega^I,\ \nabla\Lambda_{iK}^{n-1} + \Lambda_{iK}^n \omega_n^{n-1} = \Lambda_{iKI}^{n-1}\omega^I,$$
$$\Delta\Lambda_{n-1,\alpha}^n = \Lambda_{n-1,\alpha I}^n \omega^I,\ \nabla\Lambda_{n-1,K}^i + \Lambda_{n-1,K}^n \omega_n^i = \Lambda_{n-1,KI}^i \omega^I,$$
$$\Lambda_{n-1,n}^n \Lambda_{[jk]}^n + \Lambda_{n-1,n-1}^n \Lambda_{[jk]}^{n-1} + \Lambda_{i[j}^n \Lambda_{|n-1|k]}^i = 0. \qquad (1.13)$$

Совокупность функций $\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n;\ \Lambda_{iK}^{n-1};\ \Lambda_{n-1,\alpha}^n\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка $\mathcal{H}$-распределения, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1,\ \Lambda_{n-1,J}^i;\ \Lambda_{iKJ}^n;\ \Lambda_{iKJ}^{n-1};\ \Lambda_{n-1,\alpha I}^n\}$ — фундаментальный объект 2-го порядка $\mathcal{H}$-распределения.

2. Соответствие Бомпьяни — Пантази

Для распределения двумерных плоскостей в трехмерном проективном пространстве известно соответствие Бомпьяни — Пантази [5—7] между нормалями 1-го и 2-го рода, когда нормаль 2-го рода является характеристикой элемента распределения при смещении центра A вдоль кривой, касающейся нормали 1-го рода. Обобщения этого соответствия на случай распределения m-мерных линейных элементов в проективном пространстве P_n было дано Н. М. Остиану [4], а на случай гиперплоскостных элементов Н(А) было проведено Э. Д. Алшибая [1; 8; 9].

Найдем многообразие фокальных точек, принадлежащих плоскости Н(А), при смещении центра A вдоль кривой l, принадлежащей нормали 1-го рода $\nu_1 = [A,\vec{\nu}] = [A, \nu_n^a \vec{e}_a + \vec{e}_n]$ гиперплоскости Н(А):

$$\omega^a = \nu_n^a \omega^n. \qquad (2.1)$$

Зададим точку $F \in H(A)$ как

$$\vec{F} = \vec{A} + x^a \vec{e}_a \ \ (x^n = 0) \tag{2.2}$$

и потребуем, чтобы она не выходила из гиперплоскости H(A) при смещении центра A $\mathscr{H}$-распределения вдоль кривой *l*, то есть чтобы

$$d\vec{F} = \nu^a \vec{e}_a \ \ (x^n = 0). \tag{2.3}$$

Точка *F*, удовлетворяющая условию (2.3), называется фокальной точкой гиперплоскости H(A), а направление смещения точки *A*, соответствующее фокальной точке *F*, называется фокальным направлением [1].

Из условия (2.3) в силу выражения (2.2) следует, что

$$dx^a + x^b \omega_b^a + \omega^a = \nu^a , \ \ x^a \omega_b^n + \omega^n = 0 . \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) определяет многообразие фокальных точек

$$\nu_a x^a - 1 = 0 \, (x^n = 0), \tag{2.5}$$

где

$$\nu_a = -\Lambda_{ab}^n \nu_n^b - \mathscr{A}_a , \ \nabla \nu_a = \nu_{aK} \omega^K ; \tag{2.6}$$

$$\mathscr{A}_a = \Lambda_{an}^n , \ \nabla \mathscr{A}_a = \Lambda_{ab}^n \omega_n^b + \mathscr{A}_{aK} \omega^K \tag{2.7}$$

Используя обратный тензор для Λ_{ab}^n и разрешив выражение (2.6) относительно ν_n^b, получим

$$\nu_n^c = -\Lambda_n^{ca} \nu_a + \mathscr{A}_n^c , \ \nabla \nu_n^c + \omega_n^c = \nu_{nK}^c \omega^K ; \tag{2.8}$$

$$\nabla \mathscr{A}_n^c + \omega_n^c = \mathscr{A}_{nK}^c \omega^K , \tag{2.9}$$

где

$$\mathscr{A}_n^c = -\Lambda_n^{ca} \mathscr{A}_a , \ \mathscr{A}_n^i = -\Lambda_n^{ij} \mathscr{A}_j - \Lambda_n^{in-1} \mathscr{A}_{n-1} , \tag{2.10}$$

$$\nabla \nu_{nK}^c + \Lambda_{bK}^n \nu_n^b \omega_n^c + \Lambda_{bK}^n \nu_n^c \omega_n^b \equiv 0 . \tag{2.11}$$

Уравнения (2.6) и (2.8) задают соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1, 2-го рода гиперплоскости H(A), где квазитензор $\{\nu_n^c\}$ задает нормаль 1-го рода $\nu_1(A)$ гиперплоскости Н(А), а тензор $\{\nu_a\}$ (2.6) — 2-го рода $\nu_{n-2}(A)$ гиперплоскости Н(А).

При *a = n – 1* из формул (2.6) и (2.8) получим соответствие

$$\nu_{n-1} = -\Lambda^n_{n-1,n-1}\nu^{n-1}_n - \mathscr{A}_{n-1}\,, \tag{2.12}$$

где

$$\mathscr{A}_a = \Lambda^n_{an-1}\,,\ \nabla\mathscr{A}_a = \Lambda^n_{an-1}\omega^{m-1}_n + \mathscr{A}_{aK}\omega^K\,; \tag{2.13}$$

$$\nu^{n-1}_n = -\Lambda^{n-1,n-1}_n\nu_{n-1} + \mathscr{A}^{n-1}_n\,; \tag{2.14}$$

$$\mathscr{A}^{n-1}_n = -\Lambda^{n-1,n-1}_n\mathscr{A}_{n-1}\,; \tag{2.15}$$

которое устанавливает биекцию (соответствие Бомпьяни — Пантази) между нормалями 1, 2-го рода L-подрасслоения (расслоение характеристик).

Будем искать соотношение Бомпьяни — Пантази между нормалями 1, 2-го рода для Λ-подрасслоения в виде

$$\nu^i_n = -\Lambda^{ij}_n\nu_j + \mathscr{A}^i_n\,, \tag{2.16}$$

где

$$\mathscr{A}^i_n = -\Lambda^{ki}_n\mathscr{A}_i\,,\ \nabla\mathscr{A}^i_n + \omega^i_n = \mathscr{A}^i_{nK}\omega^K\,. \tag{2.17}$$

Разрешим уравнение (5.20) относительно ν_j, получим:

$$\nu_k = -\Lambda^n_{ki}\nu^i_n - \widetilde{\mathscr{A}}_{n-1}\,, \tag{2.18}$$

где

$$\widetilde{\mathscr{A}}_k = -\mathscr{A}^i_n\Lambda^n_{ki}\,, \nabla\widetilde{\mathscr{A}}_k = \Lambda^n_{ks}\omega^s_n + \widetilde{\mathscr{A}}_{kK}\omega^K\,. \tag{2.19}$$

Квазитензор $\{\nu^a_n\}$ однозначно определяет по формулам (2.6) соответствующий тензор $\{\nu_a\}$. И, наоборот, задав тензор $\{\nu_a\}$, можно однозначно определить квазитензор $\{\nu^a_n\}$ по формулам (2.18).

При помощи формул (2.16) и (2.18) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между нормалями 1, 2-го рода Λ-подрасслоения.

В результате справедлива

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка распределение порождает соответствия Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода соответственно H-, L-, Λ -подрасслоений.*

Отметим, что поле квазитензора $\{\mathscr{A}_n^a\}$ для гиперплоскостного распределения аффинного пространства было введено Э. Д. Алшибая [8; 9] и дана его геометрическая интерпретация. В силу этого поле нормалей 1-го рода A_1, оснащающего H-подрасслоения данного $\mathscr{H}$-распределения, будем называть в дальнейшем полем нормалей Э. Д. Алшибая. Поле квазитензора $\{\mathscr{A}_n^i\}$ задает поле нормалей 1-го рода Алшибая для Λ—подрасслоения, а поле квазитензоров $\{\mathscr{A}_n^{n-1}\}$ задает поле плоскостей $\mathscr{A}_{n-2}$ — поле нормалей 1-го рода Алшибая для L-подрасслоения в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

Свойства нормалей Алшибая сохраняют силу и в случае гиперполосного распределения ($\mathscr{H}$-распределения).

Теорема 4.

1. *При перемещении центра A $\mathscr{H}$-распределения вдоль кривой, касающейся нормали Алшибая* $\mathscr{A} = \mathscr{A}_n^a \vec{e}_a + \vec{e}_n$, *гиперплоскостной элемент H(A) перемещается параллельно.*

2. *В биекции Бомпьяни — Пантази (5.9) нормали Алшибая* $\vec{\mathscr{A}}(A)$, *определенной объектом* $\{\mathscr{A}_n^c\}$ *(5.11), соответствует бесконечно удаленная (n – 2)-плоскость гиперплоскости H(A) (в этом случае* $\nu_a = 0$ *).*

Список литературы

1. *Алшибая Э.Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : монография. Тбилиси, 1999.

2. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных эле-

ментов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. / ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

3. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм : учеб. пособие. Калининград, 1978.

4. *Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Труды геометрического семинара / ВИНИНТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 95—114.

5. *Bompiani E.* Sulle varieta anolonome // Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 1943. Vol. 27. P. 37—52.

6. *Pantazi Al.* Sor la deformation projective des surfaces non holonomes de l’espace E_3 // Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 1943. Vol. 45. P. 37—52.

7. *Michailescu T.* Geometrie diferentiala projectiva // Ed. Acad. RPR. 1958.

8. *Алшибая Э.Д.* О распределении гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Сообщения АН ГрССР. 1970. Т. 3. С. 545—548.

9. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений геометрических элементов в аффинном пространстве / ВИНИНТИ АН СССР. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

M. Belozerova, Yu. Popov

Correspondences of Bompyani — Pantazi generated by $\mathcal{H}$-distribution in affine space

Hyperband $\mathcal{H}$-distribution of affine space consisting of basic distribution of (n-2)-dimensional linear elements Λ_{n-2} and equipping distribution of hyperplane elements H_{n-1} with the relation of incidence of their corresponding elements in the general center A ($A \in \Lambda_m \subset H_{n-1}$) is considered.

The $\mathcal{H}$-distributions is given in the 1st order frame. The existence theorem is proved. Correspondences of Bompyani — Pantazi between 1st and 2nd normals of the main structural Λ-, L-, H-subbundles for the $\mathcal{H}$-distribution are established.